HISTORIA MATHEMATICA 13 (1986), 255–276

Dio e l'uomo nella matematica di Kronecker

FRANCESCO GANA

Via Taro 46, 00199 Roma, Italia

The paper aims to give an insight into the meaning of Kronecker's program of *Arithmetisierung* of the whole mathematics through a reappraisal of the realization of a small part of it in the reinterpretation of numerical notions such as that of integer, rational, and algebraic number in terms of the fundamental notion of natural number. It tries to convey the flavor of Kronecker's strong and deliberate opposition to both the abstract and the set-theoretic trend which were blossoming during the last three decades of the 19th century, showing at the same time how an attentive reading of Kronecker's papers on the foundations of mathematics can shed some light on how one of his most celebrated aphorisms should properly be understood. © 1986 Academic Press, Inc.

L'articolo intende dare un'idea del significato del programma di Kronecker (di ciò che egli chiamò la *Arithmetisirung* dell'intera matematica) esponendo e commentando la realizzazione di una porzione specifica di esso: la reinterpretazione nella "aritmetica generale" della nozione di numero intero, di numero razionale e di numero algebrico. Esso mette in luce l'opposizione decisa e consapevole di Kronecker sia alla tendenza astratta sia a quella insiemistica che cominciavano a entrare nella matematica durante gli ultimi trent'anni del secolo XIX, mostrando al tempo stesso come un'attenta lettura dei lavori di Kronecker sui fondamenti della matematica possa far meglio capire il senso in cui egli intendesse uno dei suoi più celebri aforismi. © 1986 Academic Press, Inc.

Cet article vise à analyser le sens du programme d'arithmétisation de l'ensemble de la pensée mathématique conçu par Kronecker. Pour ce faire, nous en réévaluons une petite partie, qui fut réalisée: la ré-interprétation, en termes de la notion fondamentale de nombre naturel, des divers nombres tels que les nombres entiers, les nombres rationnels et les nombres algébriques. Nous tentons de faire sentir au lecteur la nature de l'opposition ferme et délibérée de Kronecker à l'approche abstraite et ensembliste qui florissait au cours des trois dernières décennies du XIXe siècle. Par le fait même, nous voyons comment une lecture attentive des écrits de Kronecker sur les fondements des mathématiques permettrait de donner une interprétation plus adéquate de ses plus célèbres aphorismes. © 1986 Academic Press, Inc.

AMS 1980 subject classifications: 01A55, 03-03.
KEY WORDS: numerical notations, Arithmetisierung, R. Dedekind, fields, algebraic extensions, conjugated roots.

Nella seconda metà dell'800 i problemi che si possono dire centrali nella filosofia della matematica sono: che cosa sono i numeri? Che rapporto hanno le nozioni numeriche con le nozioni di grandezza? Perché questi tipi di problema siano diventati il punto nodale della riflessione dei matematici e dei filosofi non è difficile capirlo: è l'ultimo atto di un lungo processo di elaborazione grazie al quale la scienza e la filosofia sono riuscite a integrare costrutti mentali introdotti e trattati come numeri, e cioè i numeri negativi, i razionali, gli irrazionali e i complessi, ma

0315-0860/86 $3.00

sprovvisti di quell'interpretazione empirica immediata che caratterizza invece i numeri naturali e le operazioni fondamentali tra di essi.

Tale opera complessa di elaborazione è delineata nelle storie della matematica e, a volte, nelle storie del pensiero filosofico; il suo esito finale, per solito, è indicato nelle interpretazioni insiemistiche di quei costrutti mentali, sviluppate, in particolare, nell'opera di Weierstrass, Dedekind, Cantor e Frege. Ma, come oggigiorno ormai chiunque è pronto a sospettare, nella seconda metà dell'800 si giunse da parte di autori diversi a soluzioni essenzialmente diverse di quei due problemi, soluzioni (o linee di soluzione) che furono abbandonate e dimenticate per ragioni, ovviamente, complesse e di varia natura. Quella prospettata da Kronecker trae origine da una vasta concezione della matematica stessa, e certo non può essere adeguatamente compresa se non venga collocata nella prospettiva di tale concezione globale: la prima forma programmatica di filosofia costruttivista comparsa nella matematica. Qui, però, nel presente articolo, cercheremo di invertire l'ordine dei fattori, e cioè esponiamo e commentiamo una porzione molto specifica della soluzione kroneckeriana ai due temi ricordati sopra, e cioè il suo modo di intendere che tipi di oggetto siano i numeri negativi, i numeri razionali e la porzione 'algebrica' dei numeri reali, con l'obbiettivo di illuminare, sia pure con un lampo, due aspetti generali della filosofia della matematica di Kronecker, e cioè: (1) come vada inteso in un caso particolare il suo troppo famoso aforisma che qui mi astengo dal citare; (2) l'idea di una fondazione della matematica che è il capovolgimento esatto della mentalità che ha generato e sviluppato l'algebra astratta.

L'APPROCCIO DI DEDEKIND

Per far meglio risaltare questi temi, è utile confrontare la soluzione di Kronecker con quella insiemistica, destinata al successo, come si è sviluppata negli stessi anni in cui ci lavorava Kronecker (cioè gli anni '80 del secolo scorso); e una illustrazione esemplare della nascita della risposta 'classica' è fornita da Dedekind.

Una volta risolto il problema di dare una interpretazione insiemistica ('logica', la chiamava Dedekind [1888a, 79–80]) delle nozioni di numero naturale [Dedekind 1888a] e di numero reale [Dedekind 1872], Dedekind intendeva applicare il medesimo metodo per interpretare le nozioni di numero intero e di numero razionale; infatti, in [1888a, 82] egli prometteva al lettore una trattazione sistematica delle nozioni numeriche, una promessa mai mantenuta per ragioni facilmente congetturabili (mancanza di tempo, l'emergenza di altri e assai più gravi problemi nei fondamenti insiemistici [1888a, 87] e quindi nel fondamento stesso del metodo di Dedekind per interpretare le nozioni numeriche, e infine forse il carattere sostanzialmente elementare di tale estensione). Resta però nel *Nachlass* del materiale in cui Dedekind abbozza le linee e i metodi con cui intendeva trattare la questione. Alla sezione Dedekind III, 2 del *Nachlass* è stato assegnato, per la catalogazione, il titolo "Zum Zahlbegriff"; il primo foglio (A) contiene un passo interessante sulla nozione di numero [1]. Seguono quattro fogli di un quinterno di cui sono scritte sette facciate (B), numerate da Dedekind da 1 a 7 [2]; il titolo, di suo pugno, è "Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Grund der Reihe der natürlichen Zahlen"; la grafia e il materiale indicano una redazione indipendente di (A) e di (B). Alle sette facciate sono acclusi tre foglietti (C) scritti a matita su una sola facciata, intitolati, i primi due "Einführung der Null und der negativen g[anzen] Z[ahlen]," il terzo "Brüche"; sono veri e propri appunti, scritti in successione, e nello stesso momento. Seguono infine due fogli indipendenti che non hanno attinenza col nostro tema. Tutto il materiale è certamente successivo al 1888 (in (A) è citato *Was sind und was sollen die Zahlen?*) e sembra non posteriore al 1895 [3].

(B) ha l'aria dell'inizio di un lavoro sistematico destinato alla stampa. L'esposizione è ordinata e senza lacune, il linguaggio curato e preciso. Il titolo stesso è definitivo, esattamente il titolo del lavoro che Dedekind prometteva nel passo di [1888a] citato sopra. Il testo inizia con un primo paragrafo intitolato: "Die Einführung der Null und der negativen Zahlen"; di eventuali paragrafi successivi non sono indicati neppure i titoli. I tre foglietti (C), invece, sono chiaramente delle idee appuntate per un uso futuro, i primi due contengono idee utilizzate in (B) (manca solo l'uso delle classi di equivalenza) e recano un titolo quasi identico al primo paragrafo di (B). Da tutto ciò possiamo concludere che, molto probabilmente, i foglietti C erano appunti preparatori a (B), e che quindi (B) sarebbe dovuto proseguire con un paragrafo dedicato alle frazioni, corrispondente al terzo foglietto di (C), intitolato, come si è detto, "Frazioni" [*Brüche*].

L'idea di Dedekind in (B) è di sostituire la definizione 'naturale' di sottrazione (come inverso della somma) con un metodo di definizione che nella sostanza coincide col metodo sviluppato da Frege per definire la nozione di numero naturale. Esso consiste nel definire innanzitutto una relazione di 'equisottrattività' tra coppie di numeri naturali *senza* far riferimento alla sottrazione 'naturale', nel dimostrare che tale relazione è un'equivalenza, e quindi nel definire il *risultato* della sottrazione tra una coppia di numeri come la classe di equivalenza rispetto alla coppia data. Per le coppie $\langle a, b\rangle$ in cui $a > b$, la nuova definizione non presenta alcun vantaggio rispetto alla definizione 'naturale', ma nel caso di coppie in cui $b > a$ sì, perché essa risulta definita anche per queste coppie. Dedekind procede così: nel caso di $a > b$, la condizione $a - b = c - d$ è del tutto equivalente alla condizione $a + d = b + c$, perciò se si definice la 'equisottrattività' come una relazione tra coppie $\langle a,b\rangle$, $\langle c,d\rangle$ cosi:

$$\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle \underset{\mathrm{df}}{=} a + d = b + c$$

tale relazione (che è evidentemente una relazione d'equivalenza) coincide con $a - b = c - d$ nel caso che $a > b$, ma copre anche il caso inverso $b > a$.

Se consideriamo l'insieme $\mathcal{P}$ di tutte le classi di equivalenza $[a,b]$ rispetto a $\sim$ vediamo che vale

$$(\forall\alpha \in \mathcal{P})(\exists!\, n \in N)(\forall\langle a,b\rangle \in \alpha)((a > b \rightarrow a - b = n) \,\&\, (b > a \rightarrow b - a = n)).$$

Pertanto, per denotare α possiamo usare la notazione n^+ nel primo caso e n^- nel secondo. Lo 0 è introdotto come la classe $[a,a]$. A questo punto non resta che introdurre le nuove operazioni $\oplus$ e $\otimes$ (con inversi) tra elementi di $\mathcal{P}$ dimostrando che (1) $\oplus$ e $\otimes$ hanno le consuete proprietà di somma e prodotto, con le unità [2,1] e [1,2] (corrispondenti, rispettivamente, a -1 e $+1$) e lo zero $[a,a]$; (2) $\mathcal{P}$ è chiuso rispetto a $\oplus$, $\ominus$, e $\otimes$; e (3) per gli elementi α che contengono una coppia $\langle a,b\rangle$ (e quindi tutte) tale che $a > b$, cioè per tutti quelli denotati da n^+ (dove $n \in N$), esiste un isomorfismo con le operazioni 'naturali' $+$, $-$, e $\times$ tra numeri naturali. In effetti, si mostra facilmente che

$$m^+ \oplus n^+ = (m+n)^+$$
$$m^+ \otimes n^+ = (mn)^+.$$

La definizione delle nuove operazioni è immediata:

$$\begin{aligned} \alpha \oplus \beta &\underset{\mathrm{df}}{=} [a+c,\, b+d] \\ \alpha \ominus \beta &\underset{\mathrm{df}}{=} [a+d,\, b+c] \\ \alpha \otimes \beta &\underset{\mathrm{df}}{=} [ac+bd,\, ad+bc] \qquad (\text{dove } \langle a,b\rangle \in \alpha \text{ e } \langle c,d\rangle \in \beta), \end{aligned}$$

e le dimostrazioni sono banali.

Lo sviluppo dei numeri razionali non segue linee diverse. Delle intenzioni di Dedekind restano, come si è detto, soltanto poche righe del foglietto 3 di (C). Se per i numeri interi il sistema delle coppie e la definizione della 'equisottrattività' è un procedimento nuovo, nei numeri razionali il sistema delle coppie esisteva già nella forma delle frazioni numeriche; l'unica novità consiste nell'introduzione di classi di equivalenza. Nel foglietto 3 Dedekind introduce una relazione (evidentemente di equivalenza) tra coppie $\langle a,b\rangle$ e $\langle c,d\rangle$, dove $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, così:

$$\langle a,b\rangle \overset{\circ}{\sim} \langle c,d\rangle \underset{\mathrm{df}}{=} ad = bc,$$

dove b e d sono $\neq 0$ [4]. Quindi definisce nuove operazioni fra coppie (frazioni) nel modo consueto:

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle \oplus \langle c,d\rangle &\underset{\mathrm{df}}{=} \langle ad+bc, bd\rangle \\ \langle a,b\rangle \ominus \langle c,d\rangle &\underset{\mathrm{df}}{=} \langle ad-bc, bd\rangle \\ \langle a,b\rangle \otimes \langle c,d\rangle &\underset{\mathrm{df}}{=} \langle ac, bd\rangle \\ \langle a,b\rangle \odot \langle c,d\rangle &\underset{\mathrm{df}}{=} \langle ad, bc\rangle \qquad (\text{dove } b,\, c, \text{ e } d \neq 0). \end{aligned}$$

Infine dimostra

$$\langle a,b\rangle \overset{\circ}{\sim} \langle a,1\rangle \odot \langle b,1\rangle.$$

Qui il foglietto si arresta, ma per analogia con lo sviluppo dei primi due foglietti di (C) in (B) possiamo capire facilmente quali sarebbero state le mosse successive di Dedekind, e cioè l'introduzione di classi di equivalenza $[a/b]$ rispetto a $\overset{\circ}{\sim}$, di operazioni tra classi di equivalenza, basate sulle operazioni definite tra le coppie $\langle a,b\rangle$ e $\langle c,d\rangle$, e quindi l'introduzione dei numeri razionali come numeri corrispondenti agli elementi dell'insieme $\mathbb{Q}$ di tutte le classi di equivalenza rispetto a $\overset{\circ}{\sim}$ [5]. Ovviamente, le operazioni dovranno avere le consuete proprietà ed essere isomorfe a quelle tra interi quando applicate al sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ composto dalle classi del tipo $[a/1]$.

Due osservazioni si impongono, le quali hanno immediata attinenza col tema trattato in questo articolo.

(1) Il metodo di Dedekind pone il problema di dimostrare l'esistenza dell'insieme $\mathcal{P}$ o dell'insieme $\mathbb{Q}$, problema che per Dedekind non presenta la minima difficoltà, giacché egli usava liberamente (cosa comprensibile dati i tempi) il principio di comprensione. Ma sebbene la porzione di teoria degli insiemi necessaria per la costruzione di Dedekind sia alquanto limitata (una volta che si consideri *dato* l'insieme N, naturalmente), è importante osservare che egli trasforma il problema: che cosa sono i numeri interi (razionali)? nel problema dell'esistenza (coerenza) di certi insiemi ($\mathcal{P}$ e $\mathbb{Q}$). Questa trasformazione, del resto, è identica a quella che egli ha compiuto nel caso dei numeri naturali o dei reali, solo che in questi casi l'esistenza dell'insieme N o dell'insieme $\mathcal{R}$ (di tutte le sezioni) richiede un uso molto più forte dei principi insiemistici. Si comprende bene, alla luce di questa osservazione, come l'interrogativo: "Che cosa sono i numeri?" si sia trasformato, nei primi anni del 1900, nell'interrogativo: "Che cosa sono gli insiemi?" al centro della riflessione sui fondamenti della matematica.

(2) Nella disponibilità a sostituire i naturali coi corrispettivi 'interi positivi' di $\mathcal{P}$, o gli interi con gli interi razionali di $\mathbb{Q}$, è implicita l'idea che ciò che conta nel calcolo non sia l'insieme su cui si opera, né l'operazione concreta che si studia, ma la struttura che l'operazione (quale che essa sia) determina nell'insieme (quale che esso sia). Perciò non importa se si usano $\oplus$ e $\otimes$ in luogo di $+$ e $\times$, anzi, non importa quali specifiche operazioni si definiscano, purché determinino una struttura additiva e moltiplicativa opportuna, né importa se, in luogo di un insieme di numeri, $\mathcal{P}$ è un insieme di classi, o comunque di oggetti diversi dai numeri naturali, purché la struttura indotta da $\oplus$ e $\otimes$ in una certa porzione di $\mathcal{P}$ sia isomorfa a quella indotta da $+$ e $\times$ in N. Insomma, la linea in cui Dedekind si muove è chiaramente quella dell'algebra astratta che è culminata nel lavoro di Emmy Noether, Artin, Van der Werden, e nel Bourbaki, cioè la linea che tende a considerare come oggetto della matematica non le nozioni numeriche (né quelle di grandezza), ma le strutture indotte in insiemi qualsiasi da operazioni qualsiasi (cfr., ad es., [Bourbaki 1969, 31–34]).

Le questioni sottolineate sopra nei punti (1) e (2), ovviamente, non sono essenzialmente legate tra loro, giacché nella concezione 'astratta' della matematica la soluzione del problema (1) dell'esistenza di un modello non è obbligatoriamente limitata alla teoria degli insiemi; e d'altra parte, una interpretazione insiemistica delle nozioni numeriche può ridurre tutte le operazioni alle operazioni specifiche tra insiemi [6]. Quelle due concezioni, però, si intrecciano nell'opera di Dedekind con la consueta chiarezza e acutezza, e costituiscono indubitabilmente le due sorgenti primarie dei massimi sviluppi sia della matematica che dello studio sui fondamenti nei primi 30 anni del 1900.

L'APPROCCIO DI KRONECKER

La concezione kroneckeriana della matematica si potrebbe descrivere ottimamente, in prima approssimazione, dicendo che è esattamente l'opposto delle due tendenze che emergono nel frammento di Dedekind (oltre che in tutte le sue opere sui fondamenti). Se in definitiva la risposta alla domanda: cosa sono i numeri (negativi, frazionari, ecc.)? è, nella tradizione insiemistica: sono *oggetti* di tipo particolare (classi di equivalenza), la risposta di Kronecker è: non sono oggetti affatto, non *esistono,* nel senso che non c'è un problema di esistenza di oggetti al fondo delle nozioni numeriche (non naturali) [7]; essi sono immagini con cui descriviamo il ruolo che hanno certe indeterminate in certi aspetto del calcolo 'naturale'. Perciò non esistono neppure operazioni 'speciali' tra tali pretesi enti. Le sole operazioni reali sono quelle 'naturali', cioè tra numeri naturali. La dimostrazione di questa tesi, dunque, prende la forma (1) della riduzione di un calcolo con numeri negativi, o razionali, o algebrici, a un calcolo con indeterminate; e (2) contemporaneamente della eliminazione di operazioni definite tra oggetti (classi di equivalenza) diversi dai numeri naturali, cioè eliminazione delle operazioni di composizione 'speciali'.

Per comprendere la trattazione che Kronecker delinea in [1887b] e che qui seguiremo in maniera un po' libera, ricordiamo per sommi capi un tratto importante del programma di rifondazione della matematica elaborato da Kronecker. Una nozione fondamentale nella matematica di Kronecker è quella di 'dominio' [*Bereich*]. In [1882, 3] Kronecker rimanda a un suo articolo del 1853 per l'introduzione del concetto di 'dominio di razionalità' [*Rationalitäts-Bereich*], ma il termine vero e proprio è usato per la prima volta in [1882] [8]. Esso è analogo al concetto di 'corpo' [*Körper*] introdotto da Dedekind in [1871, 223], come osserva lo stesso Kronecker [1882, 5], tuttavia, anche in questo caso, le due introduzioni sono marcate da una differenza molto caratteristica. Dedekind rivela la sua mentalità assiomatica e astratta definendo un corpo come un qualsiasi insieme numerico che soddisfi certe condizioni (assiomi della nozione), e cioè come un qualsiasi insieme infinito di numeri reali o complessi chiuso rispetto alle quattro operazioni. Kronecker, invece, manifesta il suo approccio costruttivo, algoritmico-combinatorio fornendo una definizione descrittiva (implicitamente induttiva) dei domini di razionalità; ad esempio, nelle sue lezioni [1901, XIII,1] egli presenta un dominio di razionalità come risultante dalla *combinazione* di un insieme finito di indeterminate in ogni modo possibile mediante le quattro operazioni. In altri termini, un dominio di razionalità è caratterizzato interamente da un insieme finito (eventualmente vuoto) di indeterminate, e un suo elemento è un qualsiasi polinomio razionale delle indeterminate in questione. Nelle sue lezioni Kronecker introduceva anche la nozione di 'dominio di integrità' [*Integritäts-Bereich*] come un dominio in cui la 'combinazione' delle indeterminate avviene solo mediante le prime tre operazioni, e quindi i suoi elementi sono tutti i polinomi interi a coefficienti interi delle indeterminate che caratterizzano il dominio. Se le operazioni combinatorie si riducono solo alle prime due ($+$ e $\times$) si ottiene un tipo di dominio che è semplicemente un'estensione del calcolo 'naturale' con i numeri naturali mediante l'aggiunzione di indeterminate. L'importante è che in tale calcolo sia possibile, in linea di principio, disporre di un numero potenzialmente infinito di indeterminate, o meglio, che sia sempre possibile aggiungere al calcolo con un numero finito qualsiasi di indeterminate una nuova indeterminata. Si osservi che qui l'uso delle indeterminate con va mai confuso con l'uso di variabili. Un polinomio non è mai concepito come una funzione, ma solo come una forma in cui le indeterminate sono, non posti vuoti di una funzione, ma semplici segni privi di denotazione [9]. Inoltre, l'aggiunzione non determina alcuna modificazione sostanziale del calcolo, nel senso che le regole che estendono $+$ e $\times$ dall'anello N all'anello con indeterminate possono esser formulate una volta per tutte mediante uno *schema*.

Qui sarebbe troppo lungo analizzare storicamente la nascita di queste nozioni e del programma di Kronecker; ci limitiamo a ricordare che quest'ultima struttura, cioè l'anello 'naturale' ottenuto estendendo N con indeterminate qualsiasi, è il cuore della reinterpretazione kroneckeriana delle nozioni numeriche (anzi di tutti i calcoli matematici, su qualsivoglia grandezza); tale idea viene espressa da Kronecker negli anni '80 [10], estendendone vieppiù la portata, fino a farne un programma onnicomprensivo che arriva a immaginare una reinterpretazione dell'analisi nella struttura in questione [1887b, 253].

I NUMERI INTERI

L'idea di Kronecker, come si è detto, è di non introdurre una qualche nozione (oggetto) insiemistica che rappresenti gli interi, ma di interpretare il calcolo sugli interi nel calcolo 'naturale' con una specifica indeterminata, diciamo x_I. Partendo dall'anello naturale N e aggiungendo l'indeterminata in questione, Kronecker interpreta il calcolo con gli interi come un calcolo di congruenze modulo $x_I + 1$ nell'anello $[N, x_I]$. L'estensione della nozione di congruenza gaussiana da N a $[N, x_I]$ è immediata:

$$\alpha \equiv \beta \pmod{\gamma} \underset{\mathrm{df}}{=} (\exists \delta \in [N, x_I])\ \alpha = \delta\gamma + \beta \vee \beta = \delta\gamma + \alpha,$$

dove α, β, $\gamma \in [N, x_I]$ sono qualsiasi.

Chiamiamo, per comodità, 'congruenze speciali', o 'S-congruenze' le congruenze modulo $x_I + 1$:

$$\alpha \equiv_S \beta \underset{\mathrm{df}}{=} \alpha \equiv \beta \qquad (\mathrm{mod}\ x_I + 1). \tag{D1}$$

Se l'indeterminata x_I viene pensata come il nome di un oggetto ipotetico (che si potrebbe denotare con -1) che verificherebbe $x_I + 1 = 0$, le congruenze speciali diventano congruenze modulo zero, cioè uguaglianze tra interi. Più precisamente, se consideriamo introdotto il calcolo degli interi, per esempio come fa Dedekind, come un calcolo tra nuovi 'oggetti' di tipo speciale (classi di congruenza), possiamo definire una trasformazione α^* che trasforma appunto $\alpha \in [N, x_I]$ in un'espressione del calcolo degli interi così:

$$\alpha^* \underset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} \alpha^+ & \text{se } \alpha \in N \\ 1^- & \text{se } \alpha \text{ è } x_I \\ \beta^* \oplus \gamma^* & \text{se } \alpha \text{ è } \beta + \gamma \\ \beta^* \otimes \gamma^* & \text{se } \alpha \text{ è } \beta\gamma. \end{cases} \tag{D2}$$

E' semplice mostrare che una congruenza speciale in $[N,x_I]$ è trasformata da * in un'uguaglianza tra interi di Dedekind, infatti si vede subito che

$$\alpha = \beta \rightarrow \alpha^* = \beta^*. \qquad \text{T1}$$

Inoltre, vale il

$$\alpha \equiv_S \beta \rightarrow \alpha^* = \beta^* \qquad \text{T2}$$

Dimostrazione. Da $\alpha \equiv_S \beta$ segue che, per un certo $\alpha_0 \in [N,x_I]$, $\alpha = \beta + \alpha_0(x_I + 1)$, da cui $\alpha^* = \beta^* \oplus (\alpha_0(x_I + 1))^*$, ma $(\alpha_0(x_I + 1))^* = \alpha_0^* \otimes (1^- \oplus 1^+) = \alpha_0^* \otimes 0 = 0$, quindi $\alpha^* = \beta^*$.

Tuttavia, per dimostrare che il calcolo di Kronecker è sostituibile al calcolo degli interi bisogna anche dimostrare (ciò che Kronecker non fa in [1887b]) che un'uguaglianza tra interi può esser trasformata sempre in una congruenza speciale in $[N,x_I]$. Dato che è semplice definire un'inversa di * che trasforma un'espressione del calcolo degli interi in un elemento di $[N,x_I]$, è sufficiente dimostrare l'inverso del T2 (cioè il T6, più avanti). La cosa non presenta difficoltà [11]:

$$ax_I^n \equiv_S ax_I^{r(n/2)} \quad \text{(dove } r(n/2) \text{ indica il resto della divisione } n{:}2). \qquad \text{T3}$$

Dimostrazione. Induzione su n. Per $n = 1$ il teorema è immediato. Sia $n = m + 1$, e l'ipotesi induttiva $ax_I^m \equiv_S ax_I^{r(m/2)}$, allora

$$ax_I^{m+1} = ax_I^m x_I \equiv_S ax_I^{r(m/2)} x_I = ax_I^{r(m+1/2)}.$$

$$(\forall \alpha \in [N,x_I])(\exists m,n \in N) \qquad \alpha \equiv_S m + nx_I. \qquad \text{T4}$$

Dimostrazione. α in generale è un polinomio in x_I di grado u. Possiamo fare un'induzione su u. Se $\mathrm{gr}(\alpha) = 0$ allora $a = m$ e il teorema è immediato. Sia ora $\mathrm{gr}(\alpha) = r + 1$, cioè $\alpha = a_{r+1}x_I^{r+1} + a_r x_I^r + \ldots + a_0$; l'ipotesi induttiva è $\beta = a_r x_I^r + \ldots + a_0 \equiv_S p + qx_I$. Ora, per il T3,

$$\begin{aligned} a_{r+1}x_I^{r+1} &\equiv_S a_{r+1} && \text{se } r + 1 \text{ è pari} \\ &\equiv_S a_{r+1}x_I && \text{se } r + 1 \text{ è dispari,} \end{aligned}$$

quindi, con l'ipotesi induttiva si ottiene

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv_S (a_{r+1} + p) + qx_I && \text{se } r + 1 \text{ è pari} \\ \alpha &\equiv_S p + (a_{r+1} + q)x_I && \text{se } r + 1 \text{ è dispari.} \end{aligned}$$

$$m + r = n + p \rightarrow m + nx_I \equiv_S p + rx_I. \qquad \text{T5}$$

Dimostrazione. Dato che m, r, n, e p sono qualsiasi, possiamo supporre $m > n$ o $m = n$. *Nel primo caso*, $m = n' + n$ (dove $n' \neq 0$); ciò implica $r < p$, cioè $p = r + r'$ (per un $r' \neq 0$). Dall'ipotesi del teorema si ottiene $n' + n + r = r' + r + n$, cioè

$$\text{(a) } r' = n'.$$

Inoltre, $m + nx_I = n + nx_I + n' = n(x_I + 1) + n'$, per cui

$$\text{(b) } m + nx_I \equiv_S n'$$

e $p + rx_I = r + r' + rx_I = r(x_I + 1) + r'$, per cui

$$\text{(c) } p + rx_I \equiv_S r'.$$

Con (a), (b), e (c) si ha subito la conclusione $p + rx_I \equiv_S m + nx_I$. *Nel caso* $m = n$, si ha $r = p$ e la conseguenza del teorema è immediata.

$$\alpha^* = \beta^* \rightarrow \alpha \equiv_S \beta. \qquad \text{T6}$$

Dimostrazione. Assumiamo (a) $\alpha^* = \beta^*$. Per il T4, siano m,n,p,r tali che (b) $\alpha \equiv_S m + nx_I$, (c) $\beta \equiv_S p + rx_I$. Col T2 e D2, da (b) segue

$$\alpha^* = (m + nx_I)^* = m^+ \oplus (n^+ \otimes 1^-) = m^+ \ominus n^+,$$

e allo stesso modo si ottiene da (c)

$$\beta^* = p^+ \ominus r^+.$$

Da queste due righe, con (a) segue $m^+ \ominus n^+ = p^+ \ominus r^+$, e col calcolo degli interi si ha $m^+ \oplus r^+ = p^+ \oplus n^+$, da cui (v.p. 258) $(m + r)^+ = (p + n)^+$, e quindi $m + r = p + n$. Applicando il T5, allora, si ottiene $m + nx_I \equiv_S p + rx_I$, da cui, con (b) e (c), $\alpha \equiv_S \beta$.

Dunque, il T2 mostra che, data una congruenza speciale valida $\alpha \equiv_S \beta$, la trasformazione univoca * applicata alla congruenza dà un'uguaglianza valida tra espressioni del calcolo degli interi. D'altra parte, se definiamo l'inversa di *, che ovviamente è anch'essa univoca, per esempio così:

$$P^\circ \underset{\text{df}}{=} \begin{cases} n & \text{se } P \text{ è } n^+ \\ nx_I & \text{se } P \text{ è } n^- \\ Q^\circ + R^\circ & \text{se } P \text{ è } Q \oplus R \\ Q^\circ R^\circ & \text{se } P \text{ è } Q \otimes R, \end{cases} \qquad \text{D3}$$

dove P, Q, ed R sono espressioni del calcolo con gli interi, e dimostriamo l'ovvio

$$(P^\circ)^* = P, \qquad \text{T7}$$

il T6 consente di trasformare un'uguaglianza valida nel calcolo degli interi $P = Q$ in una congruenza speciale vera $P^\circ \equiv_S Q^\circ$ nel calcolo delle congruenze in $[N,x_I]$.

I NUMERI RAZIONALI

Lo stesso dipo di analisi Kronecker propone per i numeri razionali. Egli vuole mostrare che la costruzione di tali numeri in quanto particolari oggetti è illusoria, è una 'reificazione' di procedimenti di calcolo con indeterminate. In particolare, Kronecker considera il calcolo in un qualsiasi dominio ottenuto estendendo N con nuove indeterminate caratterizzate da un indice che può essere una qualsiasi forma polinomiale di altre indeterminate *già introdotte*. In pratica, Kronecker opera su segmenti finiti di un insieme E di forme polinomiali definito così:

I. $\alpha \in [N,x_I] \rightarrow \alpha \in E$
II. $\alpha,\beta \in E \rightarrow \alpha + \beta \in E \ \& \ \alpha\beta \in E \ \& \ x_\alpha \in E$ D1
III. Nient'altro appartiene a E.

Come è immediata l'estensione della nozione gaussiana di congruenza alle forme polinomiali, così è immediata l'estensione alla nozione kroneckeriana di congruenza secondo un 'sistema di moduli'. Come è noto, Kronecker ha chiamato due forme polinomiali F e G congruenti modulo le forme $F_0, \ldots, F_n$ se esistono $n + 1$ forme $H_0, \ldots, H_n$ tali che $F - G = \Sigma_{i=0}^{n} H_i F_i$. Tale relazione è indicata da Kronecker così: $F \equiv G$ (modd $F_0, \ldots, F_n$). Essa può venire estesa, con le dovute modifiche, a congruenze tra elementi di E così:

$$\alpha \equiv \beta \text{ (modd } \alpha_0, \ldots, \alpha_n) \underset{\text{df}}{=} (\exists \mu_0, \ldots, \mu_n)\ \alpha + \beta x_I \equiv_{\text{S}} \sum_{i=0}^{n} \mu_i \alpha_i .$$

Kronecker interpreta il calcolo con le frazioni come un calcolo tra congruenze kroneckeriane di tipo particolare, che, per comodità, chiamiamo 'congruenze regolari', e cioè congruenze secondo un sistema di moduli gli elementi del quale hanno la forma $\alpha x_\alpha + x_I$. Per rendere più immediata la comprensione della sua idea Kronecker adopera senz'altro gli interi, autorizzato in questo dalla sua analisi precedente. Pertanto, nella D1, clausola I, in luogo di $[N, x_I]$ compare $\mathbb{Z}$, e la definizione qui sopra diventa la consueta

$$\alpha \equiv \beta \text{ (modd } \alpha_0, \ldots, \alpha_n) \underset{\text{df}}{=} (\exists \mu_0, \ldots, \mu_n)\ \alpha - \beta = \sum_{i=0}^{n} \mu_i \alpha_i . \qquad \text{D2}$$

Le congruenze regolari sono allora definite così:

$$\alpha \equiv_{\text{R}} \beta \underset{\text{df}}{=} (\exists \alpha_0, \ldots, \alpha_n)\ \alpha \equiv \beta \text{ (modd } \bar{\alpha}_0, \ldots, \bar{\alpha}_n), \qquad \text{(D3)}$$

dove, per comodità, indichiamo con $\bar{\alpha}$ elementi di E della forma $\alpha x_\alpha - 1$.

Appena si interpretino le indeterminate x_α come denotanti un immaginario 'oggetto' che soddisfa $\alpha x_\alpha = 1$ (e che si potrebbe indicare con $1/\alpha$), le congruenze regolari si trasformano in congruenze modulo zero, cioè in uguaglianze tra espressioni del calcolo con i razionali. Più precisamente, se consideriamo dato il calcolo con i razionali, per esempio così come lo introduceva Dedekind, si può definire una trasformazione α_* che trasforma un elemento $\alpha \in E$ in un'espressione di quel calcolo, ad esempio così:

$$\begin{array}{rll} \alpha_* \underset{\text{df}}{=} & [\alpha/1] & \text{se } \alpha \in \mathbb{Z} \\ & [1/1] \odot \beta_* & \text{se } \alpha \text{ è } x_\beta \\ & \beta_* \oplus \gamma_* & \text{se } \alpha \text{ è } \beta + \gamma \\ & \beta_* \otimes \gamma_* & \text{se } \alpha \text{ è } \beta\gamma. \end{array} \qquad \text{D4}$$

Ora, anche qui è immediato vedere che $_*$ trasforma una congruenza regolare valida in un'uguaglianza vera tra espressioni del calcolo degli interi. Infatti tale operazione risulta univoca, e perciò da $\alpha = \beta$ segue $\alpha_* = \beta_*$; e inoltre, si vede subito che $\bar{\alpha}_* = 0$, infatti $(\alpha x_\alpha - 1)_* = (\alpha_* \otimes (x_\alpha)_*) \ominus [1/1] = (\alpha_* \otimes ([1/1] \odot \alpha_*)) \ominus [1/1] = (\alpha_* \odot \alpha_*) \ominus [1/1] = [1/1] \ominus [1/1] = 0$. Pertanto, da $\alpha \equiv_{\text{R}} \beta$, cioè da $\alpha = \beta +$

$\mu_0\bar{\alpha}_0 + \cdots + \mu_n\bar{\alpha}_n$ segue $\alpha_* = \beta_* \oplus (\alpha_0)_* \otimes (\bar{\alpha}_0)_* + \cdots + (\alpha_n)_* \otimes (\bar{\alpha}_n)_* = \beta_*$. Abbiamo quindi il

$$\alpha \equiv_R \beta \to \alpha_* = \beta_*. \qquad \text{T1}$$

Tuttavia, è indispensabile mostrare anche l'inverso, e cioè che $\alpha_* = \beta_*$ implica $\alpha \equiv_R \beta$. Qui presupponiamo alcuni teoremi elementari su $\equiv_R$, ad esempio, che $\equiv_R$ è una relazione di equivalenza e che da $\alpha \equiv_R \gamma$ e $\beta \equiv_R \delta$ segue sia $\alpha + \beta \equiv_R \gamma + \delta$ sia $\alpha\beta \equiv_R \gamma\delta$.

$$\alpha\beta x_\beta \equiv_R \alpha. \qquad \text{T2}$$

Dimostrazione. Essendo $\beta x_\beta - 1 = (\beta x_\beta - 1) \cdot 1$, si ha $\beta x_\beta \equiv_R 1$ e, con l'ovvio $\alpha \equiv_R \alpha$ si ottiene $\alpha\beta x_\beta \equiv_R \alpha$.

$$\alpha \equiv_R x_{x_\alpha}. \qquad \text{T3}$$

Dimostrazione. Infatti $x_{x_\alpha}\bar{\alpha} - \alpha\bar{x}_\alpha = \alpha - x_{x_\alpha}$, da cui $\alpha \equiv x_{x_\alpha}$ (modd $\bar{\alpha}$, $\bar{x}_\alpha$).

$$x_\alpha x_\beta \equiv_R x_{\alpha\beta}. \qquad \text{T4}$$

Dimostrazione. Infatti $x_{\alpha\beta}\bar{\alpha} + x_{\alpha\beta}x_\alpha\bar{\beta} + x_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta\overline{\alpha\beta} = x_\alpha x_\beta - x_{\alpha\beta}$, da cui $x_\alpha x_\beta \equiv x_{\alpha\beta}$ (modd $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\overline{\alpha\beta}$).

$$(\forall\alpha \in E)(\exists r,s \in \mathbb{Z})\ \alpha \equiv_R rx_s. \qquad \text{T5}$$

Dimostrazione. Per induzione sulla formazione di α.

Base. $\alpha \in \mathbb{Z}$. Allora $\alpha \equiv_R \alpha x_1$.

Passo. L'ipotesi induttiva è che esistono $m, q, n, p \in \mathbb{Z}$ tali che $\beta \equiv_R mx_q$, $\gamma \equiv_R nx_p$, e

(a) α è $\beta + \gamma$. Allora $\alpha \equiv_R mx_q + nx_p$, e, applicando il T2 si ha $\alpha \equiv_R pqx_{pq}(mx_q + nx_p) = mpqx_qx_{pq} + npqx_px_{pq} \equiv_R mpx_{pq} + nqx_{pq} = (mp + nq)x_{pq}$. Ovvero

(b) α è $\beta\gamma$. Allora $\alpha \equiv_R mx_qnx_p$, che, con T4 dà $\alpha \equiv_R mnx_{pq}$. Ovvero

(c) α è x_β. Allora, da $\beta \equiv_R mx_q$ e T3 segue $x_{x_\beta} \equiv_R x_{x_{mx_q}}$, da cui $x_\beta x_{mx_q}x_{x_\beta} \equiv_R x_\beta x_{mx_q}x_{x_{mx_q}}$, che, con T2, dà $x_\beta \equiv_R x_{mx_q}$; infine, con T4 e T3 otteniamo $x_{mx_q} \equiv_R x_m x_{x_q} \equiv_R qx_m$.

$$\alpha_* = \beta_* \to \alpha \equiv_R \beta. \qquad \text{T6}$$

Dimostrazione. Per il T5, sia $\alpha \equiv_R mx_q$ e $\beta \equiv_R nx_p$; con T1 si ottiene

$$\alpha_* = [m/1] \otimes ([1/1] \odot [1/q]) = [m/q]$$
$$\beta_* = [n/1] \otimes ([1/1] \odot [1/p]) = [n/p].$$

Ora, se si assume l'ipotesi del teorema, si ha $[m/q] = [n/p]$, cioè $\langle m,q\rangle \overset{\times}{\sim} \langle n,p\rangle$, da cui $mp = nq$. Pertanto $mpx_{pq} = nqx_{pq}$, che, con T2 dà $mx_q \equiv_R nx_p$, da cui segue $\alpha \equiv_R \beta$.

Dunque, il T1 mostra che ogni equivalenza regolare tra elementi di E è trasformata da $_*$ in un'uguaglianza tra espressioni razionali; vice versa, se si definisce l'inversa di $_*$, ad esempio, così:

$$\begin{array}{lll} A_{\wedge} \underset{\mathrm{df}}{=} m & \text{se } A \text{ è } [m/1] & \\ \phantom{A_{\wedge} \underset{\mathrm{df}}{=}} B_{\wedge} + C_{\wedge} & \text{se } A \text{ è } B \oplus C & \\ \phantom{A_{\wedge} \underset{\mathrm{df}}{=}} B_{\wedge} C_{\wedge} & \text{se } A \text{ è } B \otimes C & \qquad \text{D5} \\ \phantom{A_{\wedge} \underset{\mathrm{df}}{=}} B_{\wedge} x_{C_{\wedge}} & \text{se } A \text{ è } B \odot C, & \end{array}$$

dove A, B, C sono espressioni del calcolo con i razionali, anche $_{\wedge}$ risulta manifestamente univoca, e vale l'ovvio

$$(A_{\wedge})_* = A. \qquad \text{T7}$$

Allora, il T6 consente di trasformare un'uguaglianza qualsiasi $A = B$ del calcolo con i razionali valida in una congruenza regolare valida $A_{\wedge} \equiv_{\mathrm{R}} B_{\wedge}$ in E.

Commento. Da questi due esempi si vede abbastanza chiaramente quale senso radicale avesse per Kronecker l'idea della 'aritmetizzazione'. Non si tratta, per lui, di costruire 'nuovi oggetti' (insiemi opportuni) e nuovi calcoli *a partire* dai numeri naturali (dall'aritmetica elementare), ma di *eliminare* ogni tipo di nozione numerica superiore senza introdurre nella matematica entità estranee come gli insiemi e nuove strutture su di essi.

Qui è da osservare che Kronecker sicuramente non ignorava che la sua introduzione delle congruenze modulo $x_I + 1$ e $\alpha x_\alpha - 1$ poteva benissimo prestarsi a uno sviluppo astrattivo, in cui si definissero classi di congruenza e operazioni tra esse che riproducessero isomorficamente la struttura di $\mathbb{Z}$ o di $\mathbb{Q}$. Ad esempio, dopo la D1 delle S-congruenze si potrebbe introdurre la nozione di 'classe di S-congruenza' a una qualsiasi forma polinomiale $\alpha \in [N, x_I]$, da indicare con $[\alpha]$. Allora il T4 dimostra che, per α e β qualsiasi si possono definire in modo ovvio operazioni $[\alpha] \oplus [\beta]$ e $[\alpha] \otimes [\beta]$ con inversi e mostrare che l'insieme delle classi di congruenza è chiuso rispetto a $\oplus$, $\otimes$, $\ominus$. Oppure si può senz'altro considerare l'anello delle classi resto rispetto all'ideale generato da $x_I + 1$ e mostrare che ha le proprietà richieste per rappresentare isomorficamente $\mathbb{Z}$. E analogamente si può procedere nel caso delle congruenze regolari. Infatti, sebbene Kronecker non prenda in considerazione esplicitamente una tale strategia, tuttavia sappiamo che in quegli anni egli possedeva una teoria dell'astrazione analoga a quella di Frege e Dedekind (cfr. [Kronecker 1889, 58–90]), e a questa teoria fa implicitamente riferimento in [1887b, 256] quando introduce la nozione di *Anzahl*, di 'quantità numerica' (numero cardinale) come l' 'invariante' della nozione di ordinale finito. Commentare tutti questi temi adeguatamente richiederebbe molto spazio, e sarà materia di altri lavori; qui basta far vedere che Kronecker sceglie consapevolmente una strada diversa da quella di Dedekind.

Nella soluzione di Kronecker si manifesta la specificità dell'idea che guida tutto il suo programma di 'aritmetizzazione', e cioè l'idea di reinterpretare ogni calcolo matematico nel calcolo 'naturale' in anelli polinomiali con un numero qualsiasi di indeterminate, ciò che Kronecker chiama 'aritmetica generale' [1887a, 212; 1887b, 260]. Come Kronecker spiega in [1882, §§1–3], l'idea fondamentale à di usare delle vere e proprie costanti prive di denotazione (le indeterminate) per trattare il problema di rappresentare delle 'grandezze' non naturali nel calcolo naturale [12]. Mentre l'aritmetizzazione tipo Weierstrass e la teoria degli insiemi avevano risolto il problema del rapporto tra nozioni numeriche e nozioni di 'grandezza' riducendo le seconde alle prime, cioè definendo per ogni grandezza che entrava nella matematica una nozione puramente numerica corrispondente e indipendente, Kronecker, anche qui, è animato dalla stessa esigenza, ma risolve la situazione non creando nuove nozioni numeriche, ma trovando un metodo per trattare le 'grandezze' nella matematica senza farle entrare nella determinazione del calcolo.

I NUMERI ALGEBRICI

Le stesse tendenze guidano l'impresa kroneckeriana, meno semplice, di 'eliminare' la nozione di 'grandezza algebrica', cioè di grandezze che sono (funzioni razionali di) radici di polinomi qualsiasi a coefficienti razionali di una o più variabili. Qui ci limitiamo a considerare la sua reinterpretazione dei numeri algebrici, cioè di numeri che sono radici di polinomi, a coefficienti razionali di una sola variabile. Si è visto che nel caso degli interi e dei razionali Kronecker si è già posto in una prospettiva simile: la nozione di 'numero negativo' o di 'numero razionale' nascono non appena si assuma l'esistenza di una misteriosa grandezza che soddisfa $x_I + 1 = 0$ o, rispettivamente, $\alpha x_\alpha - 1 = 0$. Kronecker però vuole ora risolvere il problema generale di fondare un calcolo 'naturale' in cui, se si immagina che le indeterminate siano il nome di 'radici' di equazioni, si ottiene il calcolo con grandezze algebriche.

Il problema è assai più complesso di quello presentato dalle nozioni numeriche già trattate, e la sua nascita e la sua soluzione hanno una storia nel pensiero di Kronecker. Purtroppo è una storia che attualmente non siamo in grado di ricostruire, per due motivi fondamentali: uno è che il *Nachlass* di Kronecker è andato pressoché interamente perso [Edwards 1978]. L'altro è che Kronecker non amava pubblicare i suoi progetti finché non li aveva condotti a termine in modo, a suo giudizio, soddisfacente (e Kronecker era estremamente ambizioso nei suoi progetti); di conseguenza, di molte delle sue scoperte egli stesso ha occultato la storia. Questa circostanza, però, è tornata anche a suo danno, infatti a più riprese lo troviamo a dover assicurare sulla sua parola che certe nozioni e soluzioni egli le possedeva già da anni (a volte persino da trent'anni) [13].

Anche per quel che riguarda i confini esatti e gli obiettivi del suo programma totale, cioè l'aritmetizzazione (nel senso kroneckeriano) di tutta la matematica, la situazione è molto dubbia. Da un lato, infatti, Kronecker spesso parla di queste sue idee fondazionali, ma senza mai alludere a un loro eventuale sviluppo nel tempo; dall'altra, di fatto ne troviamo testimonianza nei suoi lavori solo a partire dagli anni 1880, quando, pubblicando i *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* [Kronecker 1882], una *summa,* sia pure non del tutto rifinita [p. 2], della sua teoria delle funzioni algebriche, Kronecker comincia a uscire allo scoperto e a rivelare un orientamento di fondo sottostante a *tutto* il suo modo di costruire la teoria dei numeri e delle funzioni algebriche. Ad esempio, nel

2° capoverso del §20 [pp. 70–71] Kronecker dice chiaramente che la *sua* trattazione della teoria dell'eliminazione in [1865] ha come vero obiettivo di fondo quello di studiare sistemi di equazioni razionali, a coefficienti razionali, di più variabili *senza* introdurre la nozione di radice, cioè senza considerarle come vere e proprie funzioni. E ancora, Kronecker, in alcune parole di premessa [p. 1], presenta questo lavoro tanto atteso e favoleggiato (cfr. [Edwards 1980, 329, 353]) come una sintesi dei risultati di trent'anni di lavoro dedicati a "mettere in luce il punto di vista aritmetico nell'algebra". Più avanti [p. 113] rivela che l'obiettivo dei *Grundzüge* è ridurre "tutta la teoria aritmetica delle grandezze algebriche alla teoria delle funzioni intere, a coefficienti interi, di variabili". In [1882], però, Kronecker non formula i suoi obiettivi (sia perchè ancora non sono tali, oppure perché non li ha ancora raggiunti) con la determinazione e la precisione che userà più tardi nello stesso decennio, in particolare in [1887a,b], e cioè l'idea di eliminare la nozione di funzione, e quindi di variabile, e di individuare nella teoria delle *forme* intere a coefficienti interi di indeterminate qualsiasi (quella che chiama da questo momento in poi 'aritmetica generale') il nucleo oggettivo della matematica in cui tutte le altre teorie vanno reinterpretate.

Nel caso specifico di cui qui ci occupiamo (l'interpretazione dei numeri algebrici), nel 1887 Kronecker è ormai giunto alla conclusione che le grandezze irrazionali algebriche sono nozioni di natura mista: nella misura in cui sono trattabili (rappresentabili) nell'algebra, esse non corrispondono a vere grandezze (tra cui si dà un rapporto di maggiore o minore) ma sono la reificazione di indeterminate; nella misura in cui corrispondono a vere grandezze, cioè grandezze irrazionali, esse non sono trattabili nell'algebra, ma neppure corrispondono a particolari nozioni numeriche (numeri irrazionali). Per concludere la nostra trattazione delle nozioni numeriche in Kronecker, illustriamo i metodi con cui egli dimostra la prima delle due tesi precedenti. Per ciò che concerne la sua reinterpretazione della nozione 'autentica' di grandezza irrazionale nell' aritmetica generale bisognerà occuparsene in un articolo a parte.

IL CALCOLO NELLE ESTENSIONI ALGEBRICHE

L'idea che guida Kronecker è sempre quella di interpretare il calcolo con numeri algebrici come un calcolo 'naturale' su indeterminate. Nel caso di un'estensione algebrica $\{\mathbb{Q},\alpha\}$ di $\mathbb{Q}$ in cui α è radice di un'equazione, a coefficienti in $\mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ irriducibile, un'interpretazione simile è piuttosto semplice. Si tratta solo di estendere l'interpretazione fornita da Cauchy [1847] per i numeri complessi, a radici di equazioni qualsiasi. Allora, il calcolo in $\{\mathbb{Q},\alpha\}$ si riduce al calcolo in $[\mathbb{Q},x]$ delle congruenze modulo f. Infatti, indichiamo con f^x_α il risultato della sostituzione ovunque in f di x con α, e supponiamo dato il calcolo in $\{\mathbb{Q},\alpha\}$, definito dalla condizione $f^x_\alpha = 0$ [14]. E' ovvio che

$$(\forall g,\, h \in [\mathbb{Q},x]) \qquad (g = h \rightarrow g^x_\alpha = h^x_\alpha), \qquad \text{T1}$$

ma non l'inverso, difatti $f^x_\alpha = 0^x_\alpha$, ma $f \neq 0$. Una proprietà elementare del calcolo in

$\{\mathbb{Q},\alpha\}$ mostra che l'inverso di T1 vale, però, se il grado di g e quello di h sono minori del grado di f, cioè

$$(\forall g,h \in [\mathbb{Q},x])((gr(g) < gr(f)\ \&\ gr(h) < gr(f)) \rightarrow (g = h \leftrightarrow g^x_\alpha = h^x_\alpha)). \quad \text{T2}$$

D'altra parte, in base all'algoritmo della divisione tra elementi di $[\mathbb{Q},x]$, esiste sempre un resto g' della divisione di g per f tale che $gr(g') < gr(f)$, cioè

$$(\forall g \in [\mathbb{Q},x])(\exists g' \in [\mathbb{Q},x])(gr(g') < gr(f)\ \&\ g \equiv_f g'), \quad \text{T3}$$

dove $\equiv_f$ indica la congruenza modulo f.

A questo punto è immediato il

$$(\forall g,h \in [\mathbb{Q},x])\ g \equiv_f h \leftrightarrow g^x_\alpha = h^x_\alpha. \quad \text{T4}$$

Dimostrazione. (A) (da sinistra a destra): se $g = h + ff'$, col T1 si ha $g^x_\alpha = (h + ff')^x_\alpha = h^x_\alpha + f^x_\alpha f'^x_\alpha$, ma dato che $f^x_\alpha = 0$, si ottiene $g^x_\alpha = h^x_\alpha$. (B) (da destra a sinistra): con T2 e (A) precedente si ha, per g,h qualsiasi, $g^x_\alpha = g'^x_\alpha$ e $h^x = h'^x_\alpha$, dove g' e h' hanno grado minore di f; allora da $g^x_\alpha = h^x_\alpha$ segue $g'^x_\alpha = h'^x_\alpha$, che, col T2 dà $g' = h'$; essendo $g \equiv_f g'$ e $h \equiv_f h'$, si ottiene allora $g \equiv_f h$.

Kronecker sicuramente conosceva ed esponeva nelle sue lezioni universitarie questo metodo generale di riduzione di un'estensione algebrica a un anello di polinomi. Sebbene lui non ne parli mai [15], possiamo dedurlo con ragionevole certezza dal fatto che il metodo sia menzionato nell'articolo di Molk [1885, 7–8], un lavoro che, per dichiarazione dell'autore stesso [p. 2], è basato su Kronecker [1882] e sulle lezioni universitarie di Kronecker, e che è stato letto e approvato da Kronecker stesso, il quale, in [1886, 156, nota **], lo accredita come una versione corretta del suo pensiero. Che Kronecker non tratti direttamente la riduzione del calcolo in $\{\mathbb{Q},\alpha\}$ si spiega subito con due ragioni determinanti: innanzitutto il metodo è abbastanza semplice perché Kronecker disdegni di farne oggetto di una comunicazione; in secondo luogo, non risolve affatto il problema della reinterpretazione della nozione di numero algebrico, che è ciò che sta a cuore a Kronecker.

Infatti, per fondare in generale il calcolo con numeri algebrici (qualsiasi) sul calcolo in un'estensione algebrica $\{\mathbb{Q}, \alpha\}$ è necessario prima dimostrare (tra le altre cose) che ogni elemento di $\{\mathbb{Q},\alpha\}$ è un numero algebrico (cioè che è la radice di un'equazione con coefficienti in $\mathbb{Q}$), quindi è necessario presupporre la nozione di 'numero algebrico'. Inoltre, in quella dimostrazione si fa uso essenziale della nozione di 'numeri coniugati', che non ha senso se non si presuppone appunto la nozione di radice. Insomma, perché il calcolo nelle estensioni algebriche $\{\mathbb{Q},\alpha\}$ possa fondare il calcolo generale tra numeri algebrici, è indispensabile che in $\{\mathbb{Q},\alpha\}$ abbia senso parlare delle radici coniugate di α. Né sarebbe possibile, evidentemente, interpretare i teoremi della teoria dei numeri algebrici come teoremi ipotetici della forma "Se l'equazione $f(x) = 0$ ha una radice, allora . . .", perché la premessa potrebbe essere incoerente, e quindi necessita di una dimostrazione di coerenza. Ora, è vero che tale dimostrazione di coerenza esiste, ed è per l'appunto la dimostrazione di esistenza delle radici data da Gauss (per la prima volta in [Gauss 1799]), ma in questo caso la teoria dei numeri algebrici, come le teoria delle equazioni, resta fondata su un teorema di natura essenzialmente non algebrica, bensì analitica (cfr. [Uspensky 1948; Dehn 1930, 184]), cosa che a Kronecker non poteva piacere, dato che lui aveva il progetto esattamente inverso! Questo è il problema fondazionale reale che si trova ad affrontare Kronecker, il quale è ben consapevole della sua esatta natura.

LE RADICI CONIUGATE

La soluzione è già avviata in [1882], ma dato il modo, già ricordato, in cui Kronecker presenta questo lavoro, cioè come una *summa* di trent'anni di lavoro, è impossibile stabilire quando egli abbia iniziato anche soltanto a porsi un tale problema. Nel §11 dei *Grundzüge* è sviluppata l'interpretazione 'concreta' di Kronecker della teoria dei gruppi di sostituzione di Galois. Egli la applica allo studio dei 'generi' [*Gattungen*] algebrici nel §12, e nel §13 utilizza i risultati per riformulare la 2ª dimostrazione gaussiana [1815] del teorema fondamentale dell'algebra. Come è noto, delle dimostrazioni gaussiane questa è la più 'algebrica': essa consiste nel mostrare che il problema dell'esistenza delle radici può ridursi al problema dell'esistenza di radici per equazioni di grado dispari, per le quali l'esistenza di uno zero era ritenuta certa in base a elementari considerazioni analitico-geometriche [16]. Al termine della sua riformulazione, Kronecker, alla sua maniera allusiva, distingue due tipi di 'esistenza' delle radici algebriche, fondamentalmente differenti: (1) il tipo di esistenza 'analitica' (Kronecker non usa quest'aggettivo), che egli dichiara di trattare abitualmente nei suoi corsi universitari e che promette di esporre in un articolo successivo; qui Kronecker allude alla sua versione del metodo di separazione delle radici, contenuta nella seconda parte di [1887b]. (2) Il tipo di esistenza 'aritmetico', del quale qui Kronecker non dice più nulla, ma che, a suo avviso, emerge chiaramente dalla trattazione del §13; di fatto, l'idea dell'esistenza 'aritmetica' prende origine dall'equiparazione, stabilita da Gauss [1815], tra dimostrare che ogni equazione ha radici e dimostrare che ogni forma è scomponibile in fattori lineari. Infatti, se $f(x) \in [\mathbb{Q},x]$ ha esattamente n radici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, evidentemente $f(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$, dato che $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono tutte e sole le radici della funzione a destra dell'uguaglianza; e inversamente, se si assume che $f(x)$ sia scomponibile in fattori lineari di x, cioè $f(x) = \Pi_{i=1}^{n} \alpha_i x + \beta_i$, allora $-\beta_i/\alpha_i$ sono tutte e sole le radici di $f(x)$, dato che evidentemente sono tutte e sole le radici dell'espressione a destra dell'uguaglianza. In generale, però, α e β non appartengono a $\mathbb{Q}$, ma sono 'numeri algebrici' (per esempio, radicali, ecc.), perciò la nozione di 'numero algebrico' è comunque un presupposto ineliminabile anche per il teorema della scomponibilità in fattori lineari.

Nondimeno, per Kronecker è sempre vantaggioso convertire il problema fondamentale di trovare un metodo generale per introdurre la nozione di radici coniugate in quello di trovare un metodo generale per scomporre una forma in fattori lineari; infatti, mentre non ha senso proporsi di introdurre la nozione di radici coniugate senza presupporre la nozione di numero (o grandezza) algebrico, ha senso porsi il problema di "rappresentare una qualsiasi funzione intera $f(x)$ in fattori lineari *senza* prima definire le grandezze algebriche" [Kronecker 1885, 102]. Questo è il problema che Kronecker riconosce come il "problema fondamentale" [Kronecker 1885, 102] lasciato aperto dai *Grundzüge*. Egli lo risolve tra il 1884 e il 1885 e lo comunica immediatamente (e ciò è indizio dell'importanza che gli assegnava) con una lettera a P. Mansion, il quale presenta un breve sunto della lettera in una nota di mezza pagina [Kronecker 1885], sulla rivista *Mathesis*. In essa, per una trattazione specifica, Kronecker rimanda a un futuro scritto, che questa volta, però, non si farà attendere, e cioè [1887a].

L'idea della soluzione è venuta a Kronecker tramite una semplice applicazione della teoria di Galois. Se $g(z) = 0$ è la risolvente di Galois di $f(x) = 0$, dove $g \in [\mathbb{Q}, z]$, e $f \in [\mathbb{Q}, x]$ ed è di grado n, per le note proprietà della risolvente ogni radice ξ_i di f può essere espressa come funzione intera di una qualsiasi radice ζ di g, cioè, data une radice ζ di g, si possono costruire n funzioni intere $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ di ζ a coefficienti in $\mathbb{Q}$, tali che

$$\varphi_i(\zeta) = \xi_i \qquad (1 \le i \le n).$$

Trasferendo questo risultato nel contesto della scomposizione in fattori lineari, la proprietà in questione della risolvente $g(z) = 0$ si formula dicendo che si possono definire n funzioni intere $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tali che

$$f(x) = (x - \varphi_1(\zeta)) \ldots (x - \varphi_n(\zeta)), \tag{$*$}$$

dove ζ è una qualsiasi radice di $g(z) = 0$. Ora, per il risultato della sezione precedente, sappiamo che ($*$) si può esprimere nel calcolo delle congruenze come

$$f(x) \equiv_g (x - \varphi_1(z)) \ldots (x - \varphi_n(z)). \tag{$**$}$$

La chiave della reinterpretazione, dunque, si riduce subito al compito di dimostrare *direttamente* ($**$) senza introdurre la nozione delle radici ζ e ξ_i, né quella di funzione, e tantomeno di equazione, ma solo quella di forma e di indeterminate [17]. Cioè di dimostrarlo come un teorema di quella che Kronecker in questo articolo battezza 'aritmetica generale', ovverosia il calcolo in estensioni 'naturali' di $\mathbb{Z}$ con indeterminate. In effetti, egli dimostra che, data una qualsiasi forma monica [18] $f \in [\mathbb{Z}, x]$ si può costruire una forma $g \in [\mathbb{Z}, z]$ irriducibile e n forme $r_1, \ldots, r_n \in [\mathbb{Q}, z]$ tali che

$$f \equiv_g (x - r_1) \ldots (x - r_n). \tag{$\dagger$}$$

In [1885], Kronecker si limitava appunto a comunicare un semplice esempio di applicazione di ($\dagger$): "Ecco [. . .] l'equivalenza algebrica che rimpiazza la considerazione di $\sqrt[3]{2}$:

$$x^3 - 2 = (x - \frac{1}{18} z^4)(x + \frac{1}{2} z + \frac{1}{36} z^4)(x - \frac{1}{2} z + \frac{1}{36} z^4) \tag{$\ddagger$}$$

a meno di un multiplo di $z^6 + 108$", esempio di cui in [1887a, 216–217] fornisce il metodo di derivazione. Infatti, se si sostituisce a z una radice di $z^6 + 108 = 0$, ad esempio, $\zeta = \sqrt[3]{2}\sqrt{-3}$, si ha

$$\frac{1}{18}\zeta^4 = \sqrt[3]{2},$$

$$-\left(\frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{36}\zeta^4\right) = \frac{-\sqrt[3]{2}\,(1+\sqrt{-3})}{2},$$

$$-\left(-\frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{36}\zeta^4\right) = \frac{-\sqrt[3]{2}\,(1-\sqrt{-3})}{2},$$

che sono le tre radici ξ_1, ξ_2, ξ_3 di $x^3 - 2 = 0$. Ovverosia, se si immagina che z denoti un'entità metafisica ζ che soddisfa $z^6 + 108 = 0$, il modulo diventa zero e (‡) diventa un'uguaglianza che fornisce la scomposizione in fattori lineari di $x^3 - 2$, e quindi le 'radici' di $x^3 - 2 = 0$.

L'OPERA DELL'UOMO

A questo punto si afferra un po' più concretamente che cosa intenda Kronecker per 'opera dell'uomo'. Nell'aritmetica generale, le uniche variabili ammesse sono quelle per numeri naturali, e le uniche operazioni sono la somma e il prodotto 'naturali', con inversi. In essa, le quantificazioni esistenziali hanno senso solo se applicate a variabili per numeri naturali, cioè, non si danno questioni di esistenza per nessun altro oggetto: in questo senso, gli unici 'oggetti' sono i numeri naturali. Introducendo delle costanti *prive di interpretazione,* cioè le indeterminate, l'uomo costruisce 'forme', per esempio $x_I + 1$, o $\alpha x_\alpha - 1$, o forme polinomiali qualsiasi f, e definisce, a partire dalle operazioni fondamentali e dall'uguaglianza tra numeri e tra forme, nuove relazioni, come la congruenza gaussiana, o quella kroneckeriana. Nell'aritmetica generale non si danno problem di esistenza di altri tipi di oggetti, e neppure delle forme: a un problema di esistenza (poniamo: esiste una forma f con la proprietà P?) si dà risposta solo costruendo la forma in questione [19]. Se si commette l'errore di quantificare le indeterminate, cioè di assumere una loro interpretazione come nomi di oggetti, di considerare come variabili e quindi concepire le forme come funzioni, viene fuori il problema dell'esistenza di oggetti misteriosi come le radici, i numeri negativi, i razionali, ecc. Ma l'uomo non ha la facoltà di *creare* oggetti [20], egli può solo 'fare matematica', cioè, per Kronecker, costruire e maneggiare calcoli (sia pure i più complicati) (cfr. [Kneser 1924]) partendo da oggetti naturalmente *dati,* che sono i numeri naturali e le due operazioni fondamentali. Dunque, il problema: esistono i numeri negativi (razionali, algebrici)? è mal posto; ad esso si risponde costruendo determinate forme ($x_I + 1$, ecc.) e sviluppando un calcolo di congruenze, cioè mostrando con la costruzione (umana) la possibilità di certi calcoli.

L'idea che Kronecker comincia a esprimere sempre più esplicitamente negli anni 1880 è che *tutta* la matematica, compresa l'analisi, sia reinterpretabile nell'aritmetica generale [Kronecker 1887b, 253, compresa la nota *], e conseguentemente il programma di Kronecker diventa quello di una reinterpretazione sistematica di ogni branca della matematica nella aritmetica generale: questo è ciò che Kronecker intende per *arithmetisieren* [Kronecker 1887b]. La reinterpretazione delle nozioni numeriche che abbiamo illustrato in questo articolo è un esempio della realizzazione di parte del suo programma.

Sottolineiamo, ancora una volta, che il maggior contrasto è con i progetti insiemistici, a lui contemporanei, di giustificare le nozioni numeriche 'non naturali', alcune delle quali basate su nozioni non-numeriche di 'grandezza' (l'analisi). Lì l'aritmetizzazione ha tutto un altro significato: la 'riduzione' delle nozioni di grandezza (per esempio, di grandezza continua) a nozioni numeriche è giustificata e autorizzata soltanto dalla interpretazione delle nozioni numeriche stesse come strutture *logiche* (Dedekind, Frege) o *insiemistiche* (Dedekind, Cantor), altrimenti non presenterebbe nessun vantaggio.

Per quanto concerne l'astrazione, Kronecker era sicuramente consapevole dei limiti del suo uso tradizionale nell'800 come *deus ex machina* nella creazione di nuovi oggetti matematici (cfr., per un esempio, [Lipschitz 1877, 1], e la discussione in [Gana 1982, §2.6]), come emerge chiaramente prima dalle sue osservazioni critiche in [Kronecker 1901, 57], poi dalla sua garbata correzione del testo di Lipschitz ricordato sopra (in [Kronecker 1887b, 256]), e infine soprattutto dalla sua sorprendente elaborazione di una teoria dell'astrazione (analoga ma *non* uguale a quella di Frege o a quella di Dedekind) in cui individua l'aspetto progressivo del metodo delle classi di equivalenza [Kronecker 1890, 58–60]. Egli, però, non considera mai le classi di equivalenza come nuovi oggetti matematici tra cui definire operazioni (come oggetti di un calcolo). Nel nostro caso abbiamo visto come Kronecker eviti accuratamente di procedere alla introduzione di classi di equivalenza; egli ritiene che non abbia senso la fantasia di calcolare su oggetti (infiniti) come classi di equivalenza, insiemi, ecc.; di fatto, egli pensa, si calcola su oggetti finiti, cioè su numeri naturali o comunque su un insieme finito di segni identificabili; per questa ragione egli riduce le possibilità di azione solo alle operazioni naturali su numeri naturali: se non esistono oggetti matematici diversi dai numeri naturali, non è neppure possibile definire operazioni su di essi. La nozione di operazione, e quindi di struttura, qualsiasi sarebbe per Kronecker altrettanto vacua dell'idea di 'oggetti' matematici che siano numeri non naturali, ovvero altrettanto insensata della pretesa di calcolare su oggetti infiniti. L'aritmetizzazione si palesa dunque come una lucida radicalizzazione delle convinzioni anti-astrattive che Kronecker ha sempre manifestato nella tendenza fortemente concretizzante della sua matematica [21].

Se per i contemporanei di Kronecker il significato delle sue idee e delle sue intenzioni era perfettamente chiaro, ma la loro motivazione (cioè la filosofia costruttivista) incomprehensibile [22], nel 1900, quando la motivazione sarebbe stata perfettamente comprensibile, il significato non venne compreso. Ad esempio quando Bourbaki [1969, 108] asserisce, parlando della nascita dell'algebra astratta dall'algebra dei polinomi: "Ma già Kronecker, nel 1882, si rende conto del fatto (oscuramente presentito da Gauss e Galois) che nella sua teoria le 'indeterminate' hanno soltanto il ruolo di elementi di base di un'algebra e non quello di variabili nel senso dell'analisi", egli distorce le intenzioni di Kronecker, il quale, proprio nei *Grundzüge,* a cui fa riferimento Bourbaki, dice con la massima chiarezza le ragioni per cui è *contrario* a considerare le indeterminate come gli 'elementi di un'algebra' [1882, 93–95]. Kronecker voleva sì affrancare (per le ragioni filosofiche che si sono viste) la teoria algebrica tradizionale dalla nozione di variabile, ma al tempo stesso rifiutava consapevolmente di usare la nozione di *un'* algebra, e anzi, si applicava appunto a rendere inutile l'uso di 'strutture qualsiasi' (una nozione che invece Dedekind usava già disinvoltamente negli anni 1880 [Dedekind 1888a, §10]).

La reinterpretazione delle nozioni numeriche fino ai numeri algebrici è da considerare un successo del programma di Kronecker, e certo lui la considerava come un'aquisizione importante. Naturalmente, i problemi diventano insormontabili quando Kronecker deve affrontare la nozione di numero reale, ma questo non vuol dire che egli non si sia applicato, ben più seriamente di quanto traspaia dai soliti aforismi, anche a questa porzione del programma di reinterpretazione. Questa, però, è una storia che va raccontata a parte.

NOTES

1. Pubblicato da Dugac in [Dugac 1976, 315]. Cfr. i commenti in [Gana 1982, §§ 1.1, 1.4].

2. Le prime quattro circa sono state pubblicate in traduzione francese da M. Sinaceur in [Sinaceur 1979, 129–133].

3. Questa, come altre indicazioni, sono dovute alla cortesia di Kurt Haenel.

4. Nel foglietto 3 Dedekind usa il segno = invece del segno da noi usato $\overset{\circ}{\sim}$; ma si tratta di una semplificazione 'stenografica' che denota il carettere sommario dell'appunto. Che si tratti di una semplificazione consapevole di Dedekind, e non di un errore logico, lo prova il fatto che subito dopo Dedekind dimostra che quella relazione è un'equivalenza.

5. Questa strategia è riprodotta tal quale in [Landau 1929, cap. II], un manuale di dichiarata discendenza dedekindiana, salvo per il fatto che, invece di introdurre nuove nozioni numeriche distinte dalle classi di equivalenza identifica le due cose.

6. Perciò è sbagliato interpretare l'opera di Dedekind come tutta in una tradizione *o* nell'altra. Del resto, la concezione di Dedekind delle nozioni numeriche non è né puramente insiemistica, né puramente astratta, ma ha componenti e spessori più complessi (cfr. [Gana 1982, §1]).

7. Un altro celebre aforisma, e cioè la frase con cui Kronecker commentò con Lindemann la scoperta di quest'ultimo della trascendenza di π: "A che ci serve la sua bella indagine sul numero π? A che scopo riflettere su problemi del genere se i numeri irrazionali non esistono?" [Lindemann 1928, 252], ha fatto dimenticare il fatto ancor più sorprendente che, per Kronecker, nemmeno i numeri interi 'esistono'.

8. Queste specificazioni di date sono probabilmente rivendicazioni di priorità, appena mascherate, nei confronti della nozione di 'corpo' introdotta da Dedekind.

9. O con qualche denotazione 'metafisica' (per esempio, numeri reali, radici di equazioni, 'grandezze' algebriche) che non entra essenzialmente nella matematica.

10. In [1882], ad esempio, Kronecker dichiara esplicitamente in più riprese che l'intento di fondo che lo anima è di fornire una trattazione 'aritmetica' delle nozioni algebriche.

11. Qui diamo per scontati alcuni teoremi elementari sulla congruenza, per esempio che da $\alpha \equiv_S \gamma$ e $\beta \equiv_S \delta$ segue sia $\alpha + \beta \equiv_S \gamma + \delta$, sia $\alpha\beta \equiv_S \gamma\delta$.

12. Di fatto, in [1882, §§1–3] Kronecker spiega soltanto come egli abbia applicato questo 'metodo delle indeterminate' per studiare le 'grandezze' algebriche; ma alla base del programma di Kronecker c'è l'estensione di queste idee a ogni tipo di 'grandezza'.

13. Si veda ad esempio [Kronecker 1882, 1], dove Kronecker fa risalire a circa trent'anni prima il suo studio dell'algebra "dal punto di vista aritmetico". Oppure si veda sopra, la nota 8. O ancora, per le sue dichiarazioni circa la teoria dei moduli si veda [Kronecker 1886, 160]. E per la teoria dei divisori algebrici [Kronecker 1882, 67].

14. O, equivalentemente, da una struttura additiva e moltiplicativa opportunamente definita in $[\mathbb{Q},\alpha]$.

15. Inspiegabilmente, Bourbaki [1969, 108] menziona [Kronecker 1887a] come un'esposizione di questo risultato.

16. Ma tale proprietà si basa sul teorema del valore medio, quindi una sua dimostrazione rigorosa dovrà aspettare la fondazione adeguata della nozione di continuità.

17. In realtà, in [1887a] Kronecker dimostra (**) per un sistema di moduli più complesso, ma, come ha mostrato Kneser [1888, 22–25] (cfr. anche [König 1903, IV, 10–11]) a questo scopo è sufficiente un modulo singolo, e a queste versioni qui ci richiamiamo.

18. Che la limitazione a forme moniche con coefficienti in $\mathbb{Z}$ non sia una limitazione essenziale era già noto dagli sviluppi della teoria dei numeri algebrici.

19. La base costruttivista della intera visione della matematica kroneckeriana sarà trattata in un altro lavoro.

20. Si confronti con la concezione diametralmente opposta di Dedekind [1888b, 145 e il commento in Gana 1982, 14–16].

21. Cfr. [Edwards 1980, §10] per la concretizzazione degli ideali di Kummer; per quella dei gruppi di Galois, cfr. [Kronecker 1882, §11; Kneser 1888]; e si noti che, quando Kronecker espone dall'inizio la sua teoria dei moduli, per esempio in [1886, 147–160], o anche [1901, Lez. 20, §4] sottolinea sempre l'interpretazione del calcolo tra i moduli come un calcolo tra forme lineari di un numero finito di indeterminate.

22. Le testimonianze di questo tipo di incomprensione sono svariate. Un esempio chiaro è nella risposta che Dedekind dà alle critiche di Kronecker [1886, 156, nota *] nella nota 17 di [Dedekind 1888a, 88], dove il primo confessa letteralmente di non capire le ragioni che possano motivare le restrizioni costruttiviste proposte dal secondo. Kneser [1924, 221] ricorda che le prese di posizione di Kronecker passavano per mere bizzarrie di un grand'uomo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Bourbaki, N. 1969. *Eléments d'histoire des mathématiques*. 2nd ed. Paris: Hermann.

Cauchy, A.-L. 1847. Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires. In *Oeuvres complètes*, Vol. 14, pp. 87–111. Paris: Gauthier–Villars, 1882–1958.

Dedekind, R. 1871. Über die Komposition der binären quadratischen Formen. In *Gesammelte mathematische Werke*, Vol. 3, pp. 223–261. Braunschweig: Vieweg, 1932.

——— 1872. Stetigkeit und irrationale Zahlen. Trad. it. La continuità e i numeri irrazionali. In *Scritti sui fondamenti della matematica*, pp. 63–78. Napoli: Bibliopolis, 1982.

——— 1888a. Was sind und was sollen die Zahlen? Trad. it. Che cosa sono e cosa servono i numeri? In *Scritti sui fondamenti della matematica*, pp. 79–128. Napoli: Bibliopolis, 1982.

——— 1888b. Lettera a H. Weber, del 24 gennaio 1888. Trad. it. In *Scritti sui fondamenti della matematica*, pp. 144–146. Napoli, Bibliopolis, 1982.

Dehn, E. 1930. *Algebraic equations*. New York: Dover, 1960.

Dugac, P. 1976. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Paris: Vrin.

Edwards, H. M. 1978. On the Kronecker Nachlass. *Historia Mathematica* **5**, 419–426.

——— 1980. The genesis of ideal theory. *Archive for History of Exact Sciences* **23**, 321–377.

Gana, F. 1982. "Introduzione" a R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, pp. 9–60. Napoli: Bibliopolis.

Gauss, C. F. 1799. Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. In *Werke*, vol. 3. Göttingen: Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, 1866, pp. 1–30.

——— 1815. Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. In *Werke*, vol. 3. Göttingen: Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, 1866, pp. 31–56.

Kneser, A. 1888. Arithmetische Begründung einiger algebraischer Fundamentalsätze. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **102,** 20–55.

——— 1924. Leopold Kronecker. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker–Vereinigung* **33,** 210–228.

König, J. 1903. *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen*. Leipzig: Teubner.

Kronecker, L. 1865. Über einige Interpolationsformeln für ganze Funktionen mehrer Variabeln. In *Werke*, Vol. 1, pp. 133–142. Leipzig: Teubner, 1895.

——— 1882. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*. Berlin: Reimer.

——— 1885. Une équivalence algébrique. Extrait d'une lettre de M. L. Kronecker. *Mathesis* **5,** 102.

——— 1886. Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen. In *Werke*, Vol. 3 (1), pp. 145–208. Leipzig: Teubner, 1899.

——— 1887a. Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik. In *Werke*, Vol. 3 (1), pp. 209–240. Leipzig: Teubner, 1899.

——— 1887b. Über den Zahlbegriff. In *Werke*, Vol. 3 (1), pp. 249–274. Leipzig: Teubner, 1899.

——— 1889. Zur Theorie der elliptischen Funktionen. In *Werke*, Vol. 5, pp. 1–58. Leipzig: Teubner, 1930.

——— 1901. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, a cura di K. Hensel. Leipzig: Teubner.

Landau, E. 1929. *Grundlagen der Analysis*. New York: Chelsea, 1960.

Lindemann, F. 1928. "Anmerkung 4" a H. Poincaré, *Wissenschaft und Hypothese*. Leipzig: Teubner. Traduzione tedesca di *La science et l'hypothèse*. Paris: Flammarion, 1903.

Lipschitz, R. 1877. *Lehrbuch der Analysis*, Vol. 1. Bonn: Cohen.

Molk, J. 1885. Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination. *Acta Mathematica* **6,** 1–166.

Sinaceur, H. 1979. La méthode mathématique de Dedekind. *Revue d'Histoire des Sciences* **32,** 107–142.

Uspensky, V. A. 1948. *Theory of equations*. New York: McGraw-Hill.